

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 593

Modelos de Gerações Superpostas com Muitas Gerações: Algoritmo de Solução

Roberto de Goes Ellery Junior
Rogério Boueri Miranda

Brasília, outubro de 1998

TEXTO PARA DISCUSSÃO Nº 593

Modelos de Gerações Superpostas com Muitas Gerações: Algoritmo de Solução

*Roberto de Goes Ellery Junior**
*Rogério Boueri Miranda**

Brasília, outubro de 1998

* Técnicos da Coordenação Geral de Finanças Públicas do IPEA.

MINISTÉRIO DO PLANEJAMENTO E ORÇAMENTO
Ministro: *Paulo Paiva*
Secretário Executivo: *Martus Tavares*



Presidente
Fernando Rezende

DIRETORIA

Claudio Monteiro Considera
Gustavo Maia Gomes
Hubimaier Cantuária Santiago
Luís Fernando Tironi
Mariano de Matos Macedo
Murilo Lôbo

O IPEA é uma fundação pública, vinculada ao Ministério do Planejamento e Orçamento, cujas finalidades são: auxiliar o ministro na elaboração e no acompanhamento da política econômica e promover atividades de pesquisa econômica aplicada nas áreas fiscal, financeira, externa e de desenvolvimento setorial.

TEXTO PARA DISCUSSÃO tem o objetivo de divulgar resultados de estudos desenvolvidos direta ou indiretamente pelo IPEA, bem como trabalhos considerados de relevância para disseminação pelo Instituto, para informar profissionais especializados e colher sugestões.

Tiragem: 170 exemplares

COORDENAÇÃO DO EDITORIAL

Brasília — DF:
SBS Q. 1, Bl. J, Ed. BNDES, 10^o andar
CEP 70076-900
Fone: (061) 315 5374 — Fax: (061) 315 5314
E-mail: editbsb@ipea.gov.br

SERVIÇO EDITORIAL

Rio de Janeiro — RJ:
Av. Presidente Antonio Carlos, 51, 14^o andar
CEP 20020-010
Fone: (021) 212 1140 — Fax: (021) 220 5533
E-mail: editrj@ipea.gov.br

SUMÁRIO

SINOPSE/ABSTRACT

- 1 INTRODUÇÃO **7**
 - 2 O MODELO **8**
 - 3 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO **9**
 - 4 UM EXEMPLO: ANÁLISE DE PREVIDÊNCIA **15**
 - 5 CONCLUSÃO **23**
- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **24**
-

SINOPSE

O texto apresenta um algoritmo para a resolução de modelos de gerações superpostas com muitas gerações. Uma particularidade do algoritmo apresentado é que não se limita a encontrar os estados estacionários associados a determinados valores dos parâmetros ou a algumas hipóteses de política econômica. Isso confere a esse algoritmo grande utilidade para o estudo de situações em que a trajetória para o estado estacionário possa ser determinante na adoção de uma determinada política, caso particular do problema do financiamento da previdência. Também é apresentado um exemplo de aplicação do algoritmo para simular a transição de um sistema previdenciário do tipo repartição para um do tipo capitalização.

ABSTRACT

The paper provides an algorithm to deal with overlapping generations model with too many generations. A feature of the algorithm is that it simulates all the trajectory of the economy, rather than particular steady states associated with some values to the parameters or policy hypothesis, e.g. how to finance social insurance. An example is presented to show how the algorithm works simulating the transition from a PAYGO to a fully funded social security system.

1 INTRODUÇÃO¹

Modelos de gerações superpostas têm sido muito utilizados para estudar problemas em economia que vão desde política monetária até crescimento econômico. Uma vantagem desses modelos é que permitem estudar o comportamento dos indivíduos durante o ciclo de vida, além de contarem com uma forma natural de heterogeneidade, a idade.

Dessa forma, esses modelos são de substancial utilidade para problemas que envolvem distribuição de renda entre gerações, como, por exemplo, a questão da previdência ou do financiamento da dívida pública. Por delimitar bem o ciclo de vida, também são usados para explicar por que os indivíduos escolhem certo nível de capital humano ou seguem determinadas carreiras [Krussel e Ríos-Riull, 1992].

Outro elemento que torna modelos de gerações superpostas interessantes para a análise de políticas econômicas é o fato de existir a possibilidade de o Primeiro Teorema do Bem-Estar Social não ser válido. Isso implica que o equilíbrio de mercado nem sempre é Pareto ótimo, o que dá margens para políticas econômicas efetivas.

Um dos grandes problemas associados a esses modelos é a sua intratabilidade. Modelos com mais de três gerações, em geral, não possuem soluções analíticas, o que faz com que tenham sido pouco utilizados para fins aplicados. Em geral, modelos de gerações superpostas são utilizados apenas para apresentar alguns exemplos em equilíbrio geral.

Recentemente, com a evolução dos computadores e a difusão de técnicas de simulação e análise numérica em modelos macroeconômicos, esse problema vem sendo resolvido. Existem vários exemplos de modelos com grande número de gerações sendo utilizados para analisar problemas de política fiscal, em particular a questão do

Essa tendência é consistente com os rumos que a análise macroeconômica vem tomando recentemente, qual seja, tornar-se um ramo de equilíbrio geral aplicado. Dessa forma, problemas típicos de macroeconomia, como demanda por moeda, consumo e crescimento econômico, vêm recebendo tratamento de modelos de equilíbrio geral, quer com modelos com horizonte infinito na linha de Cass-Koopmans, quer com modelos do tipo aqui discutido, ou mesmo modelos mais simples. Isso leva a simulação de modelos de equilíbrio geral a tornar-se lugar comum na análise macroeconômica.

¹ Os autores agradecem os comentários de Marcelo Caetano e Marly Matias Silva. Qualquer erro remanescente é de inteira responsabilidade dos autores.

Este texto apresenta uma maneira de resolver modelos de gerações superpostas com muitas gerações. No segundo capítulo é apresentado o modelo em suas linhas gerais; no terceiro, discute-se o algoritmo para resolvê-lo; no quarto, apresenta-se um exemplo de aplicação do algoritmo para resolver um modelo de trinta gerações com herança e previdência; no último capítulo, apresentam-se algumas conclusões e sugestões para futuras pesquisas.

2 O MODELO

O modelo será discutido em sua versão mais simples, na qual os indivíduos escolhem entre poupança e consumo, e as firmas decidem o quanto empregar de capital e trabalho. Formalmente, o problema dos indivíduos é:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \sum_{\{c_t\}_{t=1}^T} \beta^{t-1} U(c_t^g) \\ & t.q. c_1^g = w_1 - (1+x)a_2^g \\ & c_t^g = w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 2, \dots, T-1 \\ & c_T^g = w_T + (1+r_T)a_T^g \end{aligned}$$

em que g representa a geração do indivíduo; t , o tempo; w , o salário; a é a quantidade de ativos que o indivíduo possui; r , a remuneração do capital; c , a quantidade consumida; x , a taxa de crescimento da produtividade do trabalho; e β , a taxa de desconto. Note-se que, com simples variações nas restrições orçamentárias, pode-se adaptar o modelo para explicar previdência, demanda por moeda, política fiscal, ou

Por exemplo, poderia-se modificar o modelo para considerar o motivo herança absoluta, como em Martins (1995). Nesse caso, a primeira restrição assumiria a seguinte forma:

$$c_1^g = w_1 + \frac{b}{(1+n)^{T-1}} - (1+x)a_2^g$$

e a última seria escrita como:

$$c_T^g = w_T + (1+r_T)a_T^g - b$$

em que b é a quantidade deixada como herança e n , a taxa de crescimento da população. Dessa forma, seria considerado que o indivíduo deixa uma herança b , que é retirada da sua renda no seu último período de vida e distribuída entre seus herdeiros. O custo dessa sofisticação do modelo é de apenas uma equação a mais nas condições de primeira ordem.

3 DESCRIÇÃO DO ALGORITMO

Este capítulo irá descrever o método proposto para resolver modelos de gerações superpostas. Serão discutidos não apenas problemas específicos à resolução desses modelos, como também questões ligadas a métodos numéricos que se relacionem diretamente com o algoritmo em questão.

De início serão feitos pequenos comentários sobre a conveniência de utilizar técnicas numéricas para aproximar derivadas. Também serão feitos comentários sobre a resolução de sistemas de equações não lineares, que consiste em um dos pontos críticos do método proposto.² Finalmente será feita a exposição do algoritmo.

A melhor maneira de resolver um modelo de gerações superpostas depende do número de gerações existentes no modelo. Se o número de gerações for menor que três, esse modelo pode ser resolvido analiticamente; para o caso de duas gerações, a solução é trivial. Com mais de três gerações, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos para resolver o problema.

¹ Note-se que isso é normalmente feito na literatura sobre crescimento com horizonte infinito, em que a variável de controle é investimento, e não consumo.

² Na realidade, resolver as condições de primeira ordem consiste em resolver um sistema de equações não lineares. Esse problema poderia ser evitado se fossem consideradas utilidades quadráticas; nesse caso, as condições de primeira ordem seriam lineares, retirando uma das maiores dificuldades do método. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

O primeiro passo é encontrar as condições de primeira ordem. Dado que esse problema é razoavelmente fácil de resolver analiticamente, é aconselhável que seja feito dessa forma. Note-se que, embora fácil de resolver numericamente, achar derivadas deve ser feito analiticamente sempre que possível, uma vez que qualquer algoritmo dessa natureza está sujeito a erros de aproximação e arredondamento.

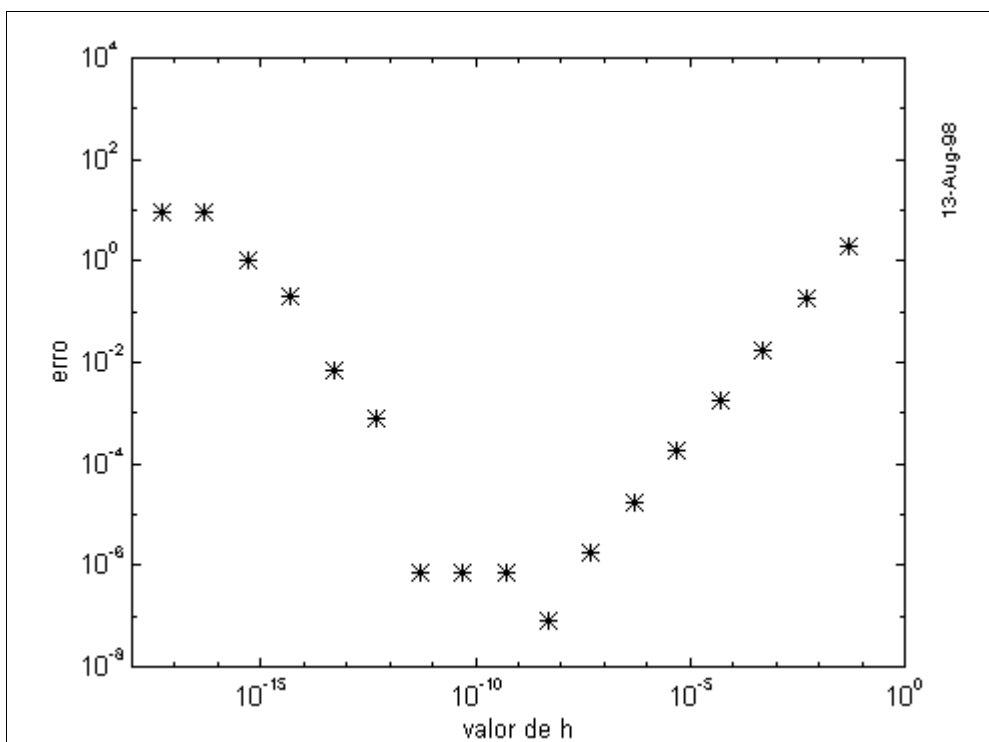
O exemplo a seguir mostra esse efeito para um caso bem simples. Considere-se a função x^9 e uma tentativa de aproximar sua derivada pela definição dada pela expressão:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Note-se que, a princípio, tem-se a impressão que a aproximação será mais precisa para valores menores de h . Esse resultado não se observa porque, à medida que h vai diminuindo, os erros de arredondamento vão-se tornando cada vez mais expressivos, levando a uma piora na aproximação da derivada.

Observando-se o gráfico 1, fica claro que os valores do erro são muito grandes tanto para baixos quanto para altos valores de h . Como não valeria a pena colocar uma rotina adicional para procurar valores ótimos para h e dada a facilidade de se achar as condições de primeira ordem, mesmo para modelos com muitas gerações, sugere-se que estas sejam fornecidas ao algoritmo.

GRÁFICO 1



Encontradas as condições de primeira ordem, devemos achar o vetor de poupanças que as resolve.³ Esse é um dos pontos cruciais do método de solução, uma vez que achar esse vetor corresponde a encontrar a solução de um sistema não linear com um número de equações igual ao número de variáveis de controle; nesse caso o número de gerações menos um, visto que ninguém poupa no último período de vida. Note-se que, se a variável de controle fosse o consumo, existiriam as equações relacionadas aos multiplicadores de Lagrange, o que aumentaria consideravelmente o tamanho do problema.

O problema para resolver esse tipo de sistema está no fato de que, em geral, não se sabe se existe solução, se esta é única, ou mesmo se o número de soluções, caso exista alguma, é finito. Dessa forma, não existe um método geral de solução para esses problemas; é necessário que seja escolhido um de acordo com o caso apresentado.

Para resolver esse sistema, é sugerido um dos métodos do tipo quasi-Newton. Estes consistem numa variação do método de Newton em que a matriz Jacobiana não é fornecida ao algoritmo. Nesse caso, vale a pena aproximar as derivadas, pois a

³ Como o número de gerações é finito, a solução será um vetor do R^T .

matriz das derivadas segundas é quadrada com dimensões iguais ao número de variáveis de controle. Para um modelo de trinta gerações são calculadas 841 derivadas!

Apresenta-se a seguir uma forma de implementar um algoritmo do tipo quasi-Newton. A implementação mostrada é a sugerida por Broyden e consta da maioria dos livros de métodos numéricos.

(a) Forneça uma aproximação inicial para a solução e inicie o indexador i como zero.

(b) Calcule, ou assuma, uma aproximação inicial para a inversa da matriz Jacobiana B^i .

(c) Calcule $p^i = -B^i f^i$ em que $f^i = f(x^i)$.

(d) Determine um número t , de forma que $\|f(x^i + t_i p^i)\| < \|f^i\|$.

(e) Calcule $x^{i+1} = x^i + t_i p^i$.

(f) Calcule $f^{i+1} = f(x^{i+1})$. Se $\|f^{i+1}\| < \varepsilon$, para ε próximo de zero; terminar o algoritmo, caso contrário seguir para o próximo passo.

(g) Use a formula a seguir para aperfeiçoar a aproximação do Jacobiano:

$$B^{i+1} = B^i - (B^i y^i - p^i)(p^i)' B^i / \{(p^i)' B^i y^i\}$$
 em que $y^i = f^{i+1} - f^i$.

(h) Faça $i = i + 1$ e volte para o passo (c).

Para se ter uma intuição do algoritmo basta observar o método de Newton para encontrar raízes de uma função qualquer, que consiste em:

(a) Fornecer uma aproximação inicial e iniciar o indexador i como zero.

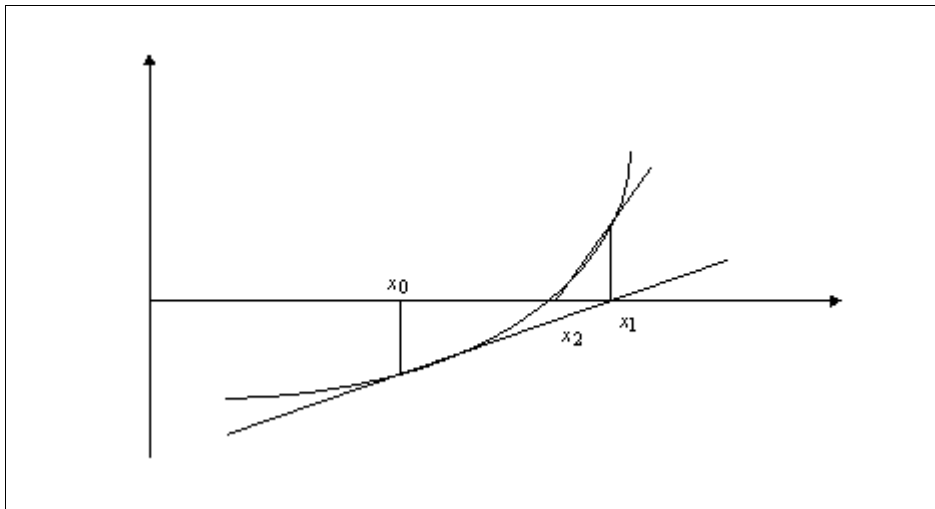
(b) Calcular a imagem do valor fornecido e traçar uma tangente a esse ponto.

(c) O ponto em que a tangente encontra o eixo das abcissas serve como a próxima

(d) O processo deve ser repetido até a imagem ficar próxima o suficiente de zero, ou seja, $|f(x)| < \varepsilon$, para ε próximo de zero.

Graficamente pode-se ilustrar o algoritmo da seguinte forma:

GRÁFICO 2



No gráfico 2 a aproximação inicial é x_0 ; dado esse valor, procura-se $f(x_0)$ no gráfico da função e traça-se uma tangente a esse ponto. O próximo passo é obtido encontrando-se o valor de x_1 . Novamente busca-se a tangente a $f(x_1)$ e, assim, sucessivamente até encontrar-se a raiz desejada.

Para avaliar a tangente torna-se necessário conhecer a derivada da função. Essa é a diferença desse método para o utilizado; no método de Broyden a derivada da função é aproximada, mas a lógica para encontrar a raiz é a mesma.

Métodos numéricos descendentes do método de Newton, em geral, dependem muito da aproximação inicial para resolver o problema proposto. Tal dependência existe tanto na velocidade de convergência quanto na sua possibilidade de encontrar a raiz.

Um paliativo utilizado no algoritmo foi fornecer a solução do problema relacionado ao período anterior como aproximação para a resolução do problema em cada período. Dessa forma, garantiu-se que a aproximação inicial estava próxima à raiz procurada.

Neste ponto cabe voltar à questão das utilidades quadráticas. Nesse caso, toda esta discussão sobre a resolução de sistemas não lineares seria evitada, pois as condições de primeira ordem são lineares. Embora isso venha a facilitar a solução do problema, ao assumir esse tipo de preferência, está-se incorrendo em todas as inconveniências associadas a esse tipo de função. De todo modo, vale ressaltar que, para essas funções, não vale a pena utilizar o método de solução proposto neste artigo, uma vez que existem alternativas bem mais simples para a solução de sistemas de equações lineares.

Encontrada a solução do sistema, torna-se possível calcular o estoque de capital da economia. Neste ponto resolve-se novamente o problema do consumidor e acha-se o novo estoque de capital. Quando os valores do estoque de capital estiverem suficientemente próximos um do outro é porque a economia chegou ao estado estacionário.

O problema da firma merece menos comentários, uma vez que é trivial. A firma escolherá capital até que a produtividade marginal do capital seja igual à sua remuneração; a escolha de trabalho será feita de forma a equalizar o salário à produtividade marginal do trabalho.

Um problema adicional, e de fundamental importância, é a questão das expectativas racionais e equilíbrio de mercado. A quantidade de capital ofertada às firmas é determinada pela poupança dos indivíduos, ou seja, no problema dos consumidores. Porém, o estoque de capital vai determinar o valor dos salários, tornando os problemas interdependentes, o que é razoável tratando-se de um modelo de equilíbrio geral.

Uma possível solução seria seguir o exemplo de alguns autores que trabalham com modelos de horizonte infinito e colocar a função de produção na restrição dos indivíduos⁴ fazendo com que a variável de controle seja investimento, e não poupança. Porém, neste algoritmo, a variável de controle será a poupança.

Não fazer essa hipótese gera o problema de que salário deve entrar na restrição orçamentária para períodos futuros, uma vez que dependem dos futuros estoques de capital. Como os indivíduos são racionais, é razoável que resolvam o problema da firma para saberem seus salários no futuro.

Fazer isso numa solução numérica seria mais complicado; seria preciso fornecer ao computador os estoques de capital no futuro, que dependem da solução de problemas que ainda não foram resolvidos. A solução proposta é resolver o problema de trás para frente. Em razão da ausência de qualquer incerteza e do fato de os agentes serem racionais, a solução não é alterada, e o algoritmo é consistente com as teorias microeconômicas que sustentam tais modelos.

Dessa forma, para se calcular os salários e a taxa de juros de cada período, basta calcular a produtividade marginal do trabalho e do capital para o estoque de capital do período. Uma vez conhecidos esses valores, pode-se colocá-los na restrição orçamentária dos indivíduos, de forma que o problema dos indivíduos fica sendo escolher o quanto poupar e, por consequência, quanto consumir, dados os preços dos fatores. Repare-se que, como a função de utilidade depende apenas do consumo, os indivíduos não escolhem o quanto trabalhar.

⁴ Seguindo, entre outros, Lucas (1988).

Dado o caráter do algoritmo proposto, é possível não só encontrar estados estacionários, mas toda a transição para esse estado. Dessa forma, seria possível analisar os efeitos de uma política não apenas no estado estacionário, mas durante toda a trajetória da economia até chegar a esse estado.

Considerando-se que políticas são implementadas por governos e que estes raramente continuarão governo até que a economia encontre o novo estado estacionário, a trajetória de transição passa a ser fundamental para a discussão da viabilidade de uma determinada política. É interessante notar que, em geral, o tempo necessário para que a economia encontre o novo estado estacionário é maior que o tempo de vida dos indivíduos que estavam vivos na época de implementação da reforma, o que magnifica a importância de se conhecer a trajetória de transição entre dois estados

Também é válido observar que o algoritmo fornece o padrão de poupança e, por consequência, o de consumo, de todas as gerações, não só daquelas que viveram durante os estados estacionários. Desse modo, é possível encontrar a utilidade dos indivíduos de cada geração e a utilidade social para um dado período durante a transição.

4 UM EXEMPLO: ANÁLISE DE PREVIDÊNCIA

Um tipo de literatura que é freqüentemente associada a modelos de gerações superpostas é a questão da previdência. Como essa questão envolve diretamente o problema de transferir renda entre gerações, esses modelos são muito apropriados para tratá-la.

Ocorre que, para a análise ser de interesse, é necessário que exista um número suficientemente grande de gerações, permitindo-se analisar os efeitos sobre as variáveis macroeconômicas dos diversos modelos de previdência. Para modelos com duas gerações a análise fica um tanto quanto debilitada, isso porque a única maneira de introduzir previdência é fazer com que os indivíduos trabalhem no primeiro período e se aposentem no segundo, o que corresponde a dizer que os indivíduos passam metade da vida aposentados.

Outro problema de trabalhar com duas gerações é a impossibilidade de estudar, de maneira apropriada, os custos que envolvem uma transição de um sistema do tipo repartição simples para um sistema do tipo capitalização. Essa é uma consequência de os indivíduos se aposentarem por um período, o que torna os custos de transição iguais à aposentadoria da geração mais velha, fazendo o problema trivial e pouco elucidativo. Por exemplo, não há como avaliar as pessoas que estão contribuindo, mas

Esse tipo de estudo foi iniciado por Auerbach e Kotlikoff para os Estados Unidos. Depois, essa técnica foi sendo divulgada, e surgiram análises semelhantes para diversos

países. Barreto e Schymura (1995) fizeram uma análise para o Brasil, com um modelo de 55 gerações. Porém, no caso brasileiro, a análise limita-se a caracterizar os estados estacionários, sem explicitar as trajetórias de transição.

O exemplo que será apresentado constará de um modelo nas linhas do do segundo capítulo, aumentado para considerar herança e a existência de um sistema previdenciário. Os agentes viverão por trinta períodos; no vigésimo período aposentam-se e passam a viver de transferências das gerações mais novas. A cada período coexistem trinta gerações, sendo que as vinte mais novas sustentam as mais velhas. Está implícito que ao envelhecerem os jovens de hoje serão sustentados pelos futuros jovens.

Claro está que a certeza de uma renda futura diminui o incentivo a poupar, pelo menos com as hipóteses do modelo, uma vez que o indivíduo pode garantir uma renda estável — o que reduz de forma considerável um dos incentivos à poupança do modelo, que é suavizar o padrão de consumo no tempo. Por exemplo, um indivíduo que se aposenta com salário integral tem um aumento de renda na velhice, considerando que não mais desconta para fins de previdência.

O problema das firmas é idêntico ao do segundo capítulo e não será revisto. O problema dos consumidores, que sofre algumas alterações, fica da forma:

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\{c_t\}_{t=1}^{30}} \sum_{t=1}^{30} \beta^{t-1} U(c_t^g) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \delta b \\ & t.q. c_1^g = (1-d1)w_1 - (1+x)a_2^g + \frac{b}{(1+n)^{29}} \\ & c_t^g = (1-d1)w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 2, \dots, 20 \\ & c_t^g = d2w_t + (1+r_t)a_t^g - (1+x)a_{t+1}^g \quad \forall t = 21, \dots, 29 \\ & c_T^g = w_T + (1+r_T)a_T^g - b \end{aligned}$$

em que $d1$ é a alíquota sobre o salário para fins de previdência, e $d2$ é a porcentagem do salário que o indivíduo recebe após aposentado. Assume-se que a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, da forma:

$$F(K, L) = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$$

enquanto a função de utilidade é suposta do tipo CES, da forma:

$$U(c_t) = \frac{\gamma}{\gamma-1} c_t^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

Os parâmetros utilizados são:

TABELA 1

Parâmetro	Valor
Participação do capital (α)	0,50
Taxa de desconto intertemporal (β)	0,94
Elasticidade de substituição (γ)	0,70
Desconto para herança (δ)	0,60
Crescimento da produtividade (x)	0,008
Crescimento da população (n)	0,023
Desconto para previdência ($d1$)	0,20
Depreciação	0,035

A porcentagem do salário a ser recebida após a aposentadoria é calculada a partir de $d1$, de modo a garantir o equilíbrio do sistema previdenciário; para $d1$ igual a 0,20, o valor de $d2$ é 1,11. Os outros parâmetros foram usados para aproximar a economia brasileira, seguindo Barreto e Schymura (1995). O parâmetro para heranças é o mais complicado, uma vez que não é de uso comum.

Para encontrar o valor de δ foi tomado em consideração que, sendo a taxa de desconto 0,94, o indivíduo estaria descontando seu consumo no trigésimo período a uma taxa $0,94^{30}$, que é aproximadamente 0,16. Considerou-se, então, que os pais valorizam mais o consumo dos filhos que o seu para chegar ao valor apresentado, que corresponde a uma taxa de desconto de aproximadamente 0,98 para os filhos.

O exercício consistirá em simular o que ocorrerá nessa economia caso o sistema previdenciário seja retirado. Nesse caso, é só construir o modelo como no capítulo 2, fazendo o salário igual a zero a partir do vigésimo período.

A princípio pode-se esperar um aumento do estoque de capital e uma mudança no padrão de poupança. Uma vez que os indivíduos não mais possuem uma renda garantida na velhice, a única maneira de suavizar o consumo é poupando enquanto novo. Esse aumento da poupança fatalmente levará a um aumento do estoque de capital no estado estacionário.

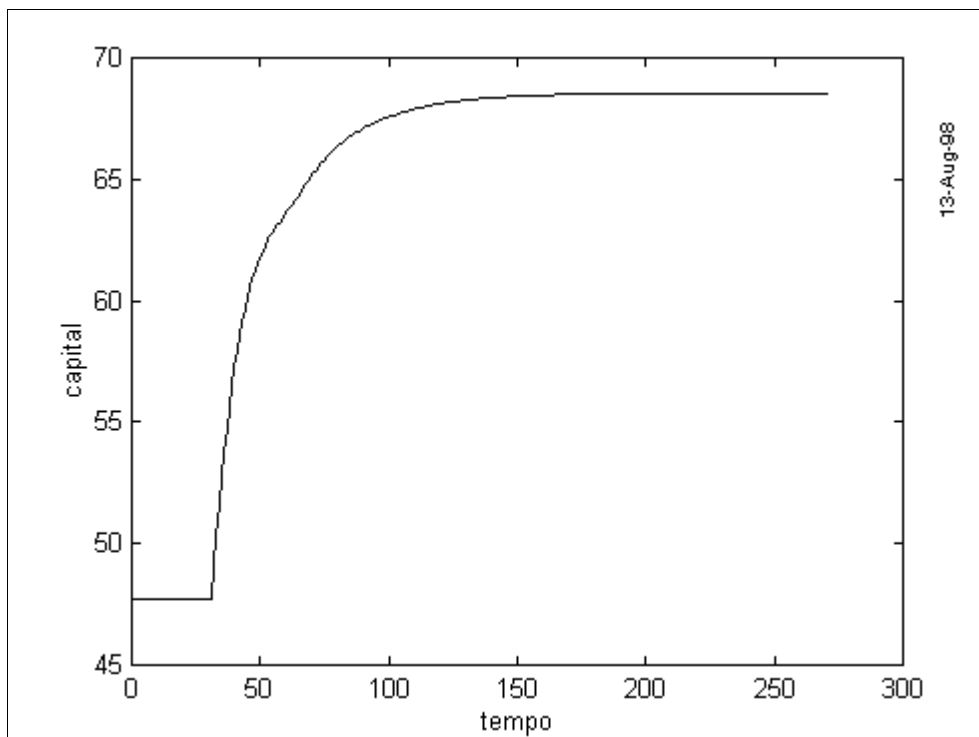
As taxas de juros e o salário têm seu comportamento tirado diretamente do estoque de capital. Dessa forma, os salários devem crescer, enquanto as taxas de juros stência de rendimentos decrescentes.

Esse aumento do estoque de capital e do salário poderia sugerir formas de financiar uma eventual transição para um sistema de capitalização. De fato, o governo poderia financiar esse processo taxando os ganhos causados pela mudança do sistema. Esse é um tópico que os autores pretendem desenvolver em futuras pesquisas.

A maior incógnita passa a ser o que acontece com a herança. Com o fim da previdência, os filhos deixam de subsidiar a velhice dos pais, ou seja, existe uma transfe-

rência de renda a favor das novas gerações. Esse efeito aponta para uma redução no valor das heranças; em contrapartida, com o aumento do estoque de capital, os pais passam a ter mais recursos, possibilitando maior herança. Não se pode ter certeza sobre qual efeito irá prevalecer. O gráfico 6 ilustrará esse efeito. O gráfico 3 a seguir mostra a trajetória do estoque de capital.

GRÁFICO 3



Note-se que a economia começa em estado estacionário, com um estoque de capital bastante baixo. Logo após a eliminação da previdência, existe um acentuado salto no estoque de capital, que, depois, segue sua trajetória para o novo estado estacionário.

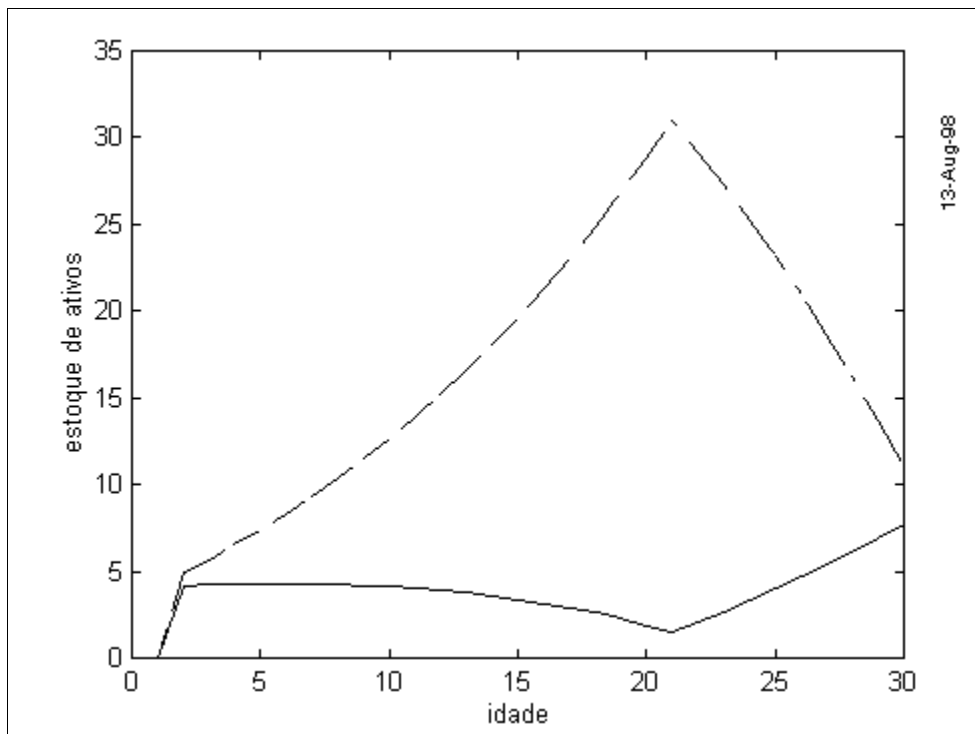
Para determinar o estoque de capital no estado estacionário, primeiro é feita sua definição como uma situação em que todas as variáveis são constantes em unidades de eficiência. O segundo passo é impor a definição de estado estacionário nas condições de primeira ordem. Finalmente, resolve-se o problema para as condições de primeira ordem já modificadas, obtendo-se, assim, o padrão de poupança no estado

A partir do valor encontrado, acha-se o estoque de capital, que será o mesmo para os primeiros trinta períodos. Daí o gráfico começar como uma linha reta e, só após o trigésimo período, seguir a trajetória para o novo estado estacionário. Tudo funciona como se a alteração fosse implementada no trigésimo período.

As iterações são feitas até que a diferença entre o estoque de capital em dois períodos subsequentes seja menor que 0,00001.

Essa mudança no nível de capital deve-se à mudança no padrão de acumulação dos indivíduos causada pelo fim do sistema previdenciário. O gráfico 4 ilustra essa mudança.

GRÁFICO 4



A linha pontilhada mostra o padrão de acumulação no estado estacionário sem previdência. Note-se que o indivíduo acumula crescentemente para poder financiar seu período inativo. Na outra linha, em que há previdência, isso não acontece, uma vez que o financiamento do período inativo está garantido. É essa mudança no padrão de acumulação que justifica o aumento do capital no estado estacionário sem previdência.

Um ponto interessante seria observar o que acontece com o padrão de poupança dos indivíduos durante suas vidas. Para isso é necessário ter clara a idéia do que consiste poupança no modelo. A obtenção da poupança é feita a partir da restrição orçamentária dos agentes, e, então, utiliza-se a definição de poupança, renda menos consumo.

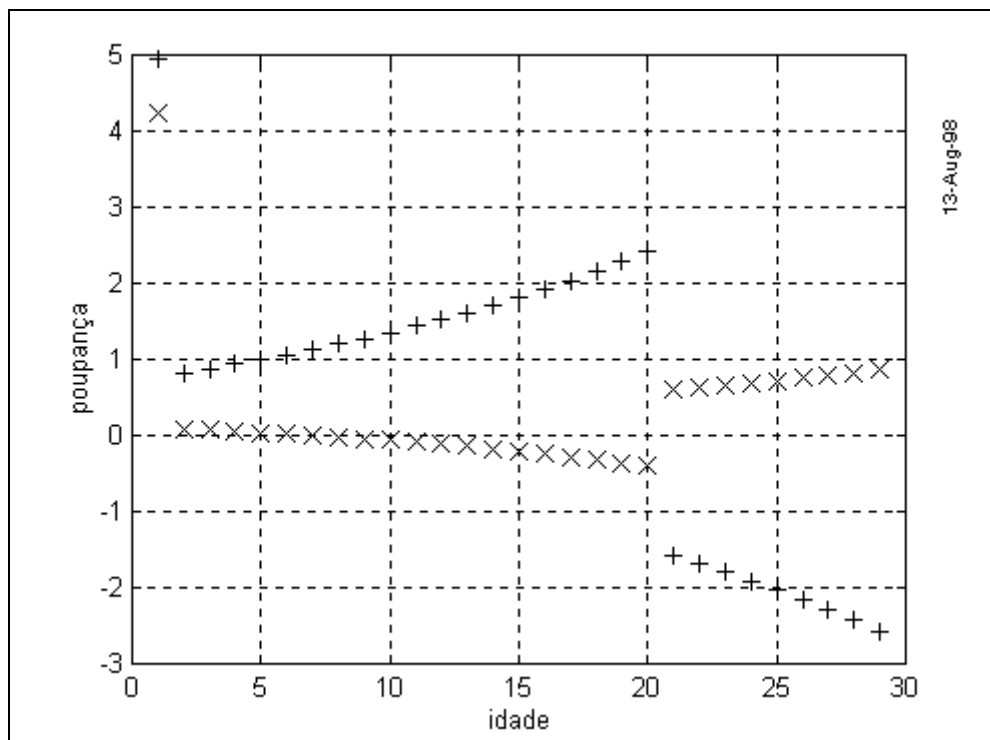
$$c_t = w_t + (1 + r_t)a_t - (1 + x)a_{t+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_t + r_t a_t - c_t = (1 + x)a_{t+1} - a_t$$

$$\Rightarrow s_t = (1 + x)a_{t+1} - a_t$$

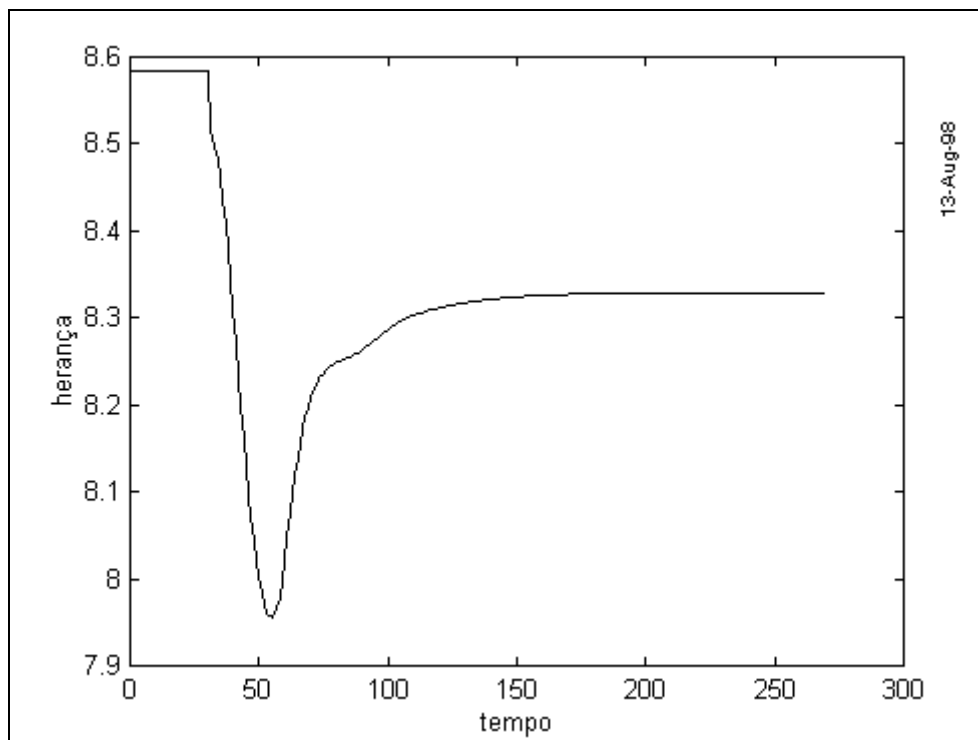
O gráfico 5 ilustra o que ocorre com a poupança. O símbolo de '+' corresponde ao modelo sem previdência, enquanto 'x' corresponde ao modelo com previdência. Observe-se que no princípio as curvas têm um comportamento semelhante. No começo os indivíduos recebem a herança e poupam cada vez menos, porém não reduzem seus patrimônios.

GRÁFICO 5



No caso sem previdência, a partir de um certo ponto, os indivíduos poupam cada vez mais com fins a construir um patrimônio para a velhice. Quando existe previdência, os indivíduos não têm essa preocupação e poupam cada vez menos, chegando a desacumular quando perto da aposentadoria. Após pararem de trabalhar, os indivíduos que recebem aposentadoria passam a construir um patrimônio para deixar de herança, enquanto os que não têm aposentadoria passam a utilizar seu patrimônio para poder viver.

Um último ponto de interesse do modelo é o que ocorre com a herança. O gráfico 6 ilustra o processo. Após o fim da previdência, os agentes ajustam-se diminuindo a herança. Isso é explicado em razão de as gerações mais velhas usarem a herança que iam deixar para os filhos, para repor parte das perdas geradas pelo fim da aposentadoria. Depois, à medida que a economia progride para o novo estado estacionário, as heranças voltam a aumentar, porém sem voltar aos níveis anteriores. A conclusão é que a herança serve para contrabalançar o fim da aposentadoria como mecanismo de transferência de renda entre as gerações.



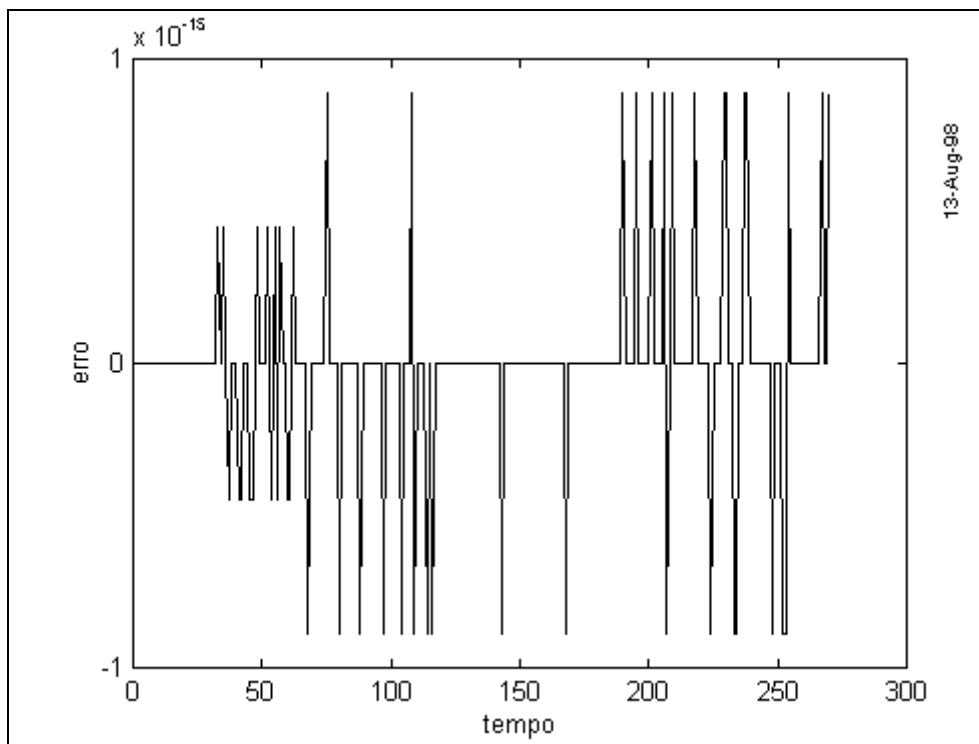
Finalmente, cabem alguns comentários a respeito das possibilidades de teste para o método de simulação. Um teste natural é observar o que acontece quando a alíquota de previdência é, inicialmente, igual a zero. Espera-se que as variáveis não sofram nenhuma alteração, uma vez que alíquota zero de previdência é equivalente a

Dessa forma, testou-se o modelo com $d1$ igual a zero, e a rotina foi modificada para que existissem cinquenta iterações, independentemente de encontrar-se o estado estacionário. Como se esperava, o estoque de capital e a herança permaneceram constantes em todas as iterações.

Outro teste é comparar os resultados do modelo com o esperado pela teoria. Em particular, deve-se observar que, se o modelo estiver correto, vale a igualdade entre

produto e renda agregados, $y = w + rk$. Note-se que esse resultado não foi passado como hipótese para o modelo. O gráfico 7 mostra essa diferença.

GRÁFICO 7



No gráfico 7 fica claro que a diferença é toda devida ao processo de arredondamento feito pelo computador. Vale destacar que o maior valor absoluto para a diferença é de $8.8818e-16$, ou seja, insignificante, enquanto a norma desse vetor é $5.3475e-15$. Também é de interesse notar que a média dos erros é igual a zero.

Este capítulo apresentou uma possível aplicação para modelos de gerações superpostas. O modelo foi resolvido de acordo com o algoritmo apresentado no capítulo anterior. Observa-se que os resultados não destoam do que seria esperado pela teoria econômica e que o algoritmo resiste a vários testes que visem avaliar sua aplicabilidade.

5 CONCLUSÃO

O texto buscou apresentar um método para a resolução de modelos de gerações superpostas em que existam muitas gerações. Também foi apresentado um exemplo de aplicações do modelo e do método.

O método apresentado apresenta a vantagem de explicitar toda a trajetória de transição de um estado estacionário para outro, possibilitando a análise de mudanças nos padrões de consumo e no bem-estar da sociedade durante a transição.

Futuros desenvolvimentos do método apontariam no sentido de procurar formas mais gerais de resolver o sistema de equações não lineares, que caracteriza as condições de primeira ordem. Note-se que a solução encontrada para aperfeiçoar os *chutes* durante o cálculo da transição não se aplica quando o objetivo é encontrar o estado

Também pode-se buscar maior refinamento nos valores encontrados como solução do sistema. Métodos de solução que aplicam pequenos choques aleatórios nas raízes encontradas são úteis para testar estabilidade e para fugir de pontos extremos.

Outra sugestão para futuras pesquisas seria incluir lazer na função de utilidade. Como isso incluiria um grande número de novas equações nas condições de primeira ordem, o método de solução do sistema não linear, provavelmente, teria que ser revisto.

Finalmente, deve-se apontar para outras possíveis aplicações dos modelos aqui tratados. Em particular, pode-se buscar uma maneira de financiar a transição de um sistema de repartição para um de capitalização com receitas tributárias geradas sobre o aumento do estoque de capital. Outra interessante aplicação é comparar o financiamento da dívida pública via títulos e via tributação, buscando-se analisar a equivalência ricardiana.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARRAU, Patricio e SCHIDT-HEBELL, Klaus. *Macroeconomics and intergenerational welfare effects of a transition from a pay-as-you-go to fully-funded pension systems*. 1993. Versão preliminar.
- AUERBACH, Alan e KOTLIKOFF, Laurence. *Dynamic fiscal policy*. Cambridge University Press, 1987.
- BARRETO, Flávio e SCHYMURA, Luiz Guilherme. Aplicação de um modelo de gerações superpostas para a reforma da previdência no Brasil: uma análise de sensibilidade no *In: Anais da SBE*. 1995.
- BARRETO, Flávio e SCHYMURA, Luiz Guilherme. Privatização da seguridade social no Brasil: um enfoque de equilíbrio geral computável. *In: Anais da SBE*. 1997.
- ENGELN-MÜLLGES, Gisela e UHLIG, Frank. *Numerical algorithms with C*. Springer 1996.
- FARMER, Roger. *The macroeconomics of self-fulfilling prophecies*. The MIT press, 1993.
- HUANG, He; IMROHOROGLU, Selahattin. e SARGENT, Thomas. *Two computations to fund social security*. 1996. Versão preliminar.
- KOTLIKOFF, Laurence. *Simulating the privatization of social security in general equilibrium*. NBER, 1996. (Working Paper, 5776)
- KRUSSEL, Per e RÍOS-RIULL, José Victor. *Choosing not to grow: how bad policies can be outcomes of dynamic voting equilibria*. 1992. Versão preliminar.
- LINDFIELD, George e PENNY, John. *Numerical methods using MATLAB*. Ellis Horwood, 1995.
- LUCAS, Robert E. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 1988.
- MARTINS, Marco A. Bonds, interests and capital acumulation. *Revista Brasileira de Economia*, 1995.
- McCANDLESS, George e WALLACE, Neil. *Introduction to dynamic macroeconomics theory — an overlapping generations approach*. Harvard University Press, 1995.
- MIRANDA, Rogério. *Previdência social em três modelos novo-clássicos*. EPGE, 1997. Dissertação de Mestrado.
- PRESS, Willian; TEUKOLSKY, Saul; VETTERLING, Willian e FLANNERY, Brian. *Numerical recipes in C - The Art of Scientific Computing* — Cambridge: University Press, 1994.
-